УДК 681.142

О. Ю. Редьога, Н. А. Яремчук

АРИФМЕТИЗАЦІЯ ОРДИНАЛЬНИХ ШКАЛ ВИМІРЮВАННЯ ЯКОСТІ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ

Вступ

Ординальні шкали були введені до складу вимірювальних в 2008 році [1]. Це шкали, на яких встановлені відношення еквівалентності та порядку. Розрізняють «нечислові» (вербальні) шкали и кількісні, в яких введені умовні одиниці (бали, числа), які визначаються специфікацією даної шкали. Ординальні шкали якості відображають взаємозв'язок між градаціями (пунктами) шкали і можливими станами даного виробу. Нехай, наприклад, проводиться вимірювання деякого показника якості X програмного засобу за шкалою строгого лінійного порядку $S=(X;R_{>})$, $X=\{x_0,\ldots,x_{m+1}\}$, $(x_i,x_{i-1})\in R_{>}$, $i=1,\ldots,m+1$, де $R_{>}$ – відношення строгого лінійного порядку, $m+1$ – кількість градацій шкали. Якість програмного засобу (ПЗ) оцінюється експертами за здатністю ПЗ вирішувати конкретні задачі. Оцінка проводиться відповідно до п'яти вербальних градацій ($m=3$): x_0 – ПЗ зовсім не відповідає висунутим вимогам, x_1 – ПЗ погано відповідає висунутим вимогам, x_2 – ПЗ працює задовільно, x_3 – ПЗ працює добре, x_4 – ПЗ повністю відповідає поставленим вимогам. Використання «нечислових» шкал для вимірювання якості ставить задачу узгодження результатів вимірювання за такими шкалами з методами подальшої статистичної обробки вихідного матеріалу, які орієнтовані на використання тільки числових вихідних даних. Крім того, збільшилось число випадків взаємодії з областями математичної кібернетики при вирішенні задач упорядкування ПЗ за ступенем «надання переваги», «цінності», «корисності» тощо.

Тому ставиться задача арифметизації вербальних шкал вимірювання якості [3], тобто задача присвоєння визначених дійсних чисел градаціям шкали $S=(X;R_{>})$ зі збереженням заданих відношень, що входять в структуру $R_{>}$. Іншими словами, знаходять відповідність φ між множиною градацій X шкали S і множиною дійсних чисел, що задає арифметизацію шкали вимірювання якості ПЗ і є гомоморфізмом емпіричної системи в числову.

Постановка задачі

Задачею даної статті є аналіз і порівняння різних способів арифметизації ординальних шкал якості ПЗ, розробка алгоритму процедури арифметизації, встановлення зв’язку між процедурою арифметизації та видами випробовувань ПЗ.

1. Аналіз і порівняння різних підходів до арифметизації ординальних шкал якості ПЗ

Існують різні підходи до вирішення задачі арифметизації ординальної шкали, які спираються на певну додаткову (апріорну) інформацію, що дозволяє в тій чи іншій мірі компенсувати відсутність інформації з локалізації градацій ординальної шкали на числовій осі.

Апріорною інформацією вважається емпіричний закон зв’язку градацій шкали порядку з числовими значеннями певної величини, що відповідає степеню прояву вимірюваної якості.

Для арифметизації використовують різні методи, наприклад, метод, що базується на емпіричному аналізі статистичного зв’язку рангу долей, що отримуються в результаті розбиття деякої системи на частини, з числовим значенням цих частин; цей метод базується на припущенні, що існує деякий статистичний механізм, який породжує це розбиття.

Для орієнтовного оцінювання градацій шкали якості ПЗ при арифметизації можна використовувати метод комплексування показників якості [2]. В цьому випадку визначають рівень одиничних показників якості за допомогою експертів: В – високий, С – середній, Н – низький. При арифметизації шкали якості приймають числове значення комплексного показника, що дорівнює 1 при високому рівні, при середньому рівні всіх одиничних показників – 0,5, при низькому рівні – 0. В такому випадку значення комплексного показника визначають за формулою [2]

$$Q = 1 - \frac{n_н}{n} - 0,5 \cdot \frac{n_с}{n}, \tag{1}$$

де $n_н$, та $n_с$ – кількість одиничних показників низького та середнього рівня відповідно,

n – кількість комплексних одиничних показників.

Проведемо арифметизацію градацій шкали «низький», «середній».

Щоб знайти межу середній – низький використаємо (1), для 50% показників середнього та 50% показників низького рівня маємо:

$$Q_{нс} = 1 - \frac{1}{2} - 0,5 \cdot \frac{1}{2} = 0,25.$$

Межу середній – високий рівень, при 50% показників високого рівня знайдемо за формулою

$$Q_{св} = 1 - 0,5\frac{n_в}{n} = 1 - 0,5\frac{1}{2} = 0,75. \qquad (2)$$

Результати арифметизації показано на рис. 1.

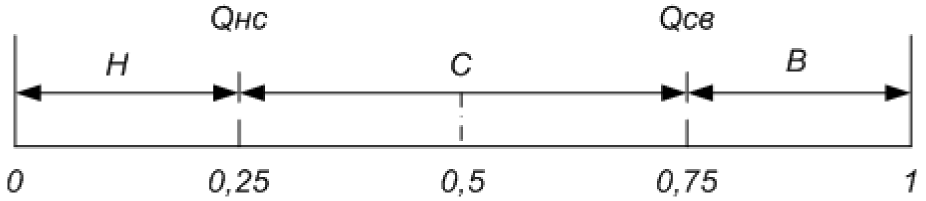

Рис. 1. Арифметизація шкали якості з градаціями середній – низький та середній – високий

Більш адекватною моделлю стохастичної процедури арифметизації є модель рівномірного розподілу ймовірності на множині допустимих траєкторій, де кожна траєкторія є послідовність точок $(x_0,0), (x_1, y(x_1)), ..., (x_m, y(x_m)), (x_{m+1}, n)$, а кожна з цих точок характеризується одномірним розподілом $p(j,i) = p(j;i,m,n) = P(\xi(i,m,n))$, ймовірності проходження траєкторій $\xi(i)$ через точку (i, j) [3]. Формула одномірного розподілу $p(j,i)$ (3):

$$p(j;i) = \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!}\prod_{k=1}^{i-1}(x + \frac{k}{n})\prod_{l=1}^{m-i}((1-x) + \frac{l}{n})\frac{n^{m-1} \cdot n!}{(m+n)!}, \qquad (3)$$

де $x = 0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1.$

При цьому градаціями арифметизації $\varphi(x_i), ..., \varphi(x_n)$ є математичні очікування на основі рівномірно розподіленої величини. Формула математичного очікування (4) :

$$\varphi_0(x_i) = M\xi(i;m,n) = in(m+1)^{-1}. \qquad (4)$$

Алгоритм процедури арифметизації за наведеним вище способом розглянутий нижче.

2. Алгоритм арифметизації ординальної шкали вимірювання якості програмного забезпечення

Проведемо арифметизацію ординальної шкали якості програмного забезпечення за допомогою методу, вибір якого обґрунтований в попередньому розділі.

Для арифметизації за шкалою балів розробимо наступний алгоритм арифметизації:

2.1. Визначення градацій вербальної шкали якості строгого лінійного порядку $S=(X;R_{>})$, $X=\{x_0,...,x_{m+1}\}$.
2.2. Визначення шкали для проведення арифметизації SB.
2.3. Визначення числових значень градацій за математичним очікуванням і середнім квадратичним відхиленням.
2.4. Визначення одномірних розподілів для окремих градацій шкали.
2.5. Визначення верхніх та нижніх значень діапазону арифметизації шкали $S=(X;R_{>})$.
2.6. Вибір конкретної арифметизації шкали.

Розглянемо процес арифметизації за шкалою балів на прикладі.

2.1. Визначення градацій вербальної шкали якості строгого лінійного порядку $S=(X;R_{>})$, $X=\{x_0,...,x_{m+1}\}$.

Наприклад, маємо вербальну шкалу якості ПЗ (m=7):

x_0 – ПЗ зовсім не відповідає висунутим вимогам,

x_1 – ПЗ відповідає незначній частині висунутих вимог,

x_2 – ПЗ відповідає лише частині висунутих вимог,

x_3 – рівень якості ПЗ наближається до рівня «задовільний»,

x_4 – рівень якості ПЗ задовільний,

x_5 – рівень якості ПЗ наближається до рівня «добрий»,

x_6 – рівень якості ПЗ добрий,

x_7 – рівень якості ПЗ наближається до відповідності всім вимогам,

x_8 – ПЗ повністю відповідає поставленим вимогам.

2.2. Визначення шкали для проведення арифметизації SB.

Проведемо арифметизацію ординальної шкали $S=(X;R_{>})$, $X=\{x_0,...,x_8\}$ за допомогою відображення $\varphi(x_i)$ в дев'ятибальну шкалу балів $SB=(Y;R'_{\geq})$, $Y=\{y_0,...,y_n\}$ $n=8$.

Випадкові бали $\xi(0;7,8),...,\xi(8;7,8)$, які приписують пунктам x_0, x_8, є випадковими величинами, які з ймовірністю 1 приймають значення 0 та 9 відповідно, тому їх не розглядають, $y(x_0)=0$; $y(x_8)=1$; $y_0=y(x_0)=0$; $y_n=y(x_8)=1$.

2.3. Визначення числових значень градацій за математичним очікуванням і середнім квадратичним відхиленням.

Математичне очікування вибирається як значення $\varphi(x_i),...,\varphi(x_n)$ арифметизації шкали $S=(X;R_{>})$ та знаходиться за формулою (4).

Маємо градації ординальної шкали $\varphi_0(x_i)=1,...,7$.

Розрахуємо $\sigma(i;m,n)$ – середнє квадратичне відхилення за формулою (5)

$$\sigma(i;m,n) = \sqrt{D\xi(i;m,n)}\ . \tag{5}$$

Дисперсія $D\xi(i;m,n)$ заходиться наступним чином (6)

$$D\xi(i;m,n) = n^2 \cdot \frac{i \cdot (m-i+1)}{(m+1)^2 \cdot (m+1)} + n \cdot \frac{i \cdot (m-i+1)}{(m+1) \cdot (m+2)}\ . \tag{6}$$

Результати обрахунків середнього квадратичного відхилення $\sigma(i;m,n)$ та дисперсії $D\xi(i;m,n)$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1.

Середнє квадратичне відхилення та дисперсія

i	1	2	3	4	5	6	7
$D\xi(i;m,n)$	1,556	2,667	3,333	3,556	3,333	2,667	1,556
$\sigma(i;m,n)$	1,247	1,633	1,826	1,886	1,826	1,633	1,247

2.4. Визначення одномірних розподілів для окремих градацій шкали

Стохастичний процес арифметизації шкали $S = (X; R_>)$ має одномірні розподілення $p(j;1,7,8),\dots,p(j;7,7,8)$ випадкових балів $\xi(1;7,8),\dots,\xi(7;7.8)$, що відповідають пунктам $x_1,\dots,x_7$ шкали $S = (X; R_>)$, розраховуємо їх за формулою (3), результати наведено в табл. 2.

Таблиця 2.

Одномірні розподілення $p(j;1,7,8),\dots,p(j;7,7,8)$

j	$p(j;1,7,8)$	$p(j;2,7,8)$	$p(j;3,7,8)$	$p(j;4,7,8)$	$p(j;5,7,8)$	$p(j;6,7,8)$	$p(j;7,7,8)$
0	0,944	0,2	0,077	0,026	0,007	0,001	0,0002
1	0,008	0,246	0,154	0,075	0,028	0,007	0,001
2	0,013	0,215	0,196	0,131	0,065	0,023	0,003
3	0,013	0,157	0,196	0,174	0,114	0,052	0,006
4	0,01	0,098	0,163	0,19	0,163	0,098	0,01
5	0,006	0,052	0,114	0,174	0,196	0,157	0,013
6	0,003	0,023	0,065	0,131	0,196	0,215	0,013
7	0,001	0,007	0,028	0,075	0,154	0,246	0,008
8	0,0002	0,001	0,007	0,026	0,077	0,2	0,944

Зобразимо дані табл. 2 з математичними очікуваннями по окремим градаціям на рис. 1.

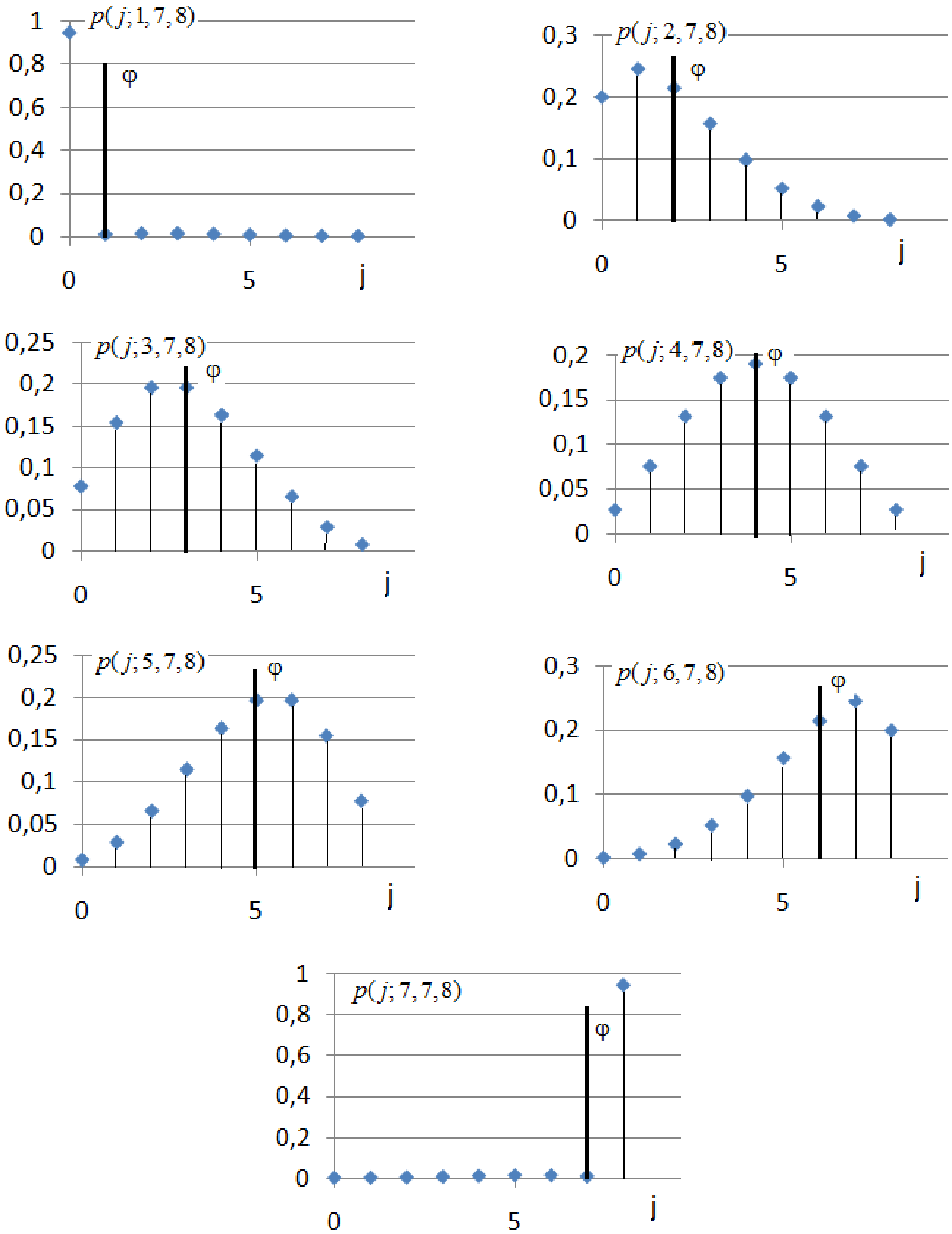

Рис. 1. Одномірні розподілення $p(j;1,7,8),\ldots,p(j;7,7,8)$ з математичними очікуваннями $\varphi(x_i),\ldots,\varphi(x_n)$

2.5. Визначення верхніх та нижніх значень діапазону арифметизації шкали $S=(X;R_{>})$

Визначаємо арифметизації $\varphi_{-}(x_i;\alpha)$ та $\varphi_{+}(x_i;\alpha)$, що представляють собою нижню та верхню границю відхилення від середньої арифметизації $\varphi_0(x_i)$. Арифметизація $\varphi_{-}(x_i;\alpha)$ та $\varphi_{+}(x_i;\alpha)$ за формулами (7)

$$\varphi_-(x_i;\alpha) = \varphi_0(x_i) - \alpha\sigma(i;m,n),$$
$$\varphi_+(x_i;\alpha) = \varphi_0(x_i) + \alpha\sigma(i;m,n). \qquad (7)$$

Результати обрахунків арифметизації $\varphi_-(x_i;\alpha)$ та $\varphi_+(x_i;\alpha)$ представлено в табл. 3 при $\alpha = 0{,}5;1{,}0;1{,}5$.

Таблиця 3.

Нижні та верхні границі арифметизації при $\alpha = 0{,}5;1{,}0;1{,}5$

i	$\varphi_-(x_i;0.5)$	$\varphi_+(x_i;0.5)$	$\varphi_-(x_i;1)$	$\varphi_+(x_i;1)$	$\varphi_-(x_i;1.5)$	$\varphi_+(x_i;1.5)$
1	0,376	1,624	0	2,247	0	2,871
2	1,184	2,816	0,367	3,633	0	4,449
3	2,087	3,913	1,174	4,826	0,261	5,739
4	3,057	4,943	2,114	5,886	1,172	6,828
5	4,087	5,913	3,174	6,826	2,261	7,739
6	5,184	6,816	4,367	7,633	3,551	8
7	6,376	7,624	5,753	8	5,129	8

На рис. 2 зображено дані табл. 1 та табл. 4.

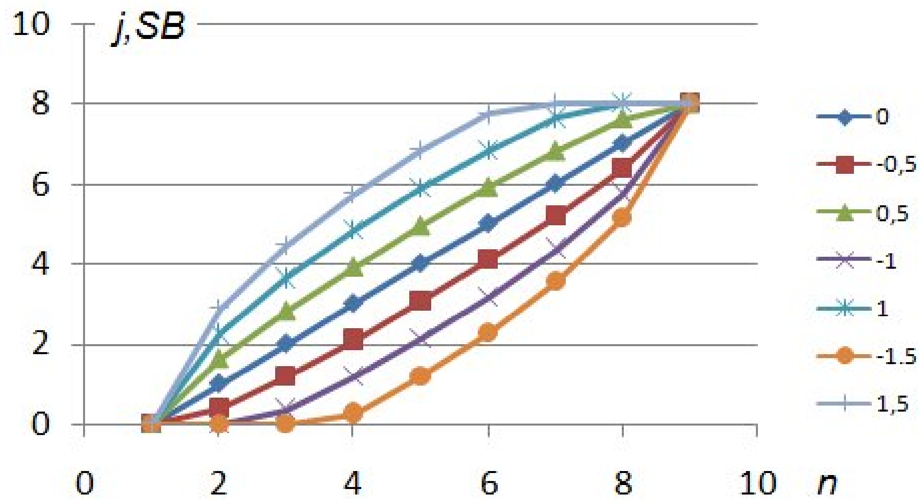

Рис. 2. Арифметизація φ_0 та верхні і нижні її границі при $\alpha = 0{,}5;1{,}0;1{,}5$

В результаті ми отримали три шкали арифметизації SB_-, SB_0, SB_+, за якими можна арифметизувати ординальну шкалу $S = (X;R_>)$.

2.6. Вибір конкретної арифметизації шкали

Існує невизначеність у виборі арифметизації. І вона тим більша, чим ближче n до m.

Варіація наведеного вище прикладу розрахована за формулою (8), результат наведено в табл. 4.

$$\operatorname{var}\xi(i,m,n)=\sqrt{\frac{(m-i+1)}{i(m+1)}+\frac{(m+1)(m-i+1)}{in(m+2)}} \tag{8}$$

При достатньо великих значеннях параметра n варіацій приймає незалежний від цього параметра вигляд (9):

$$\operatorname{var}\xi(i,m,n)=\sqrt{\frac{(m-i+1)}{i(m+1)}}\,. \tag{9}$$

Розглянемо на прикладі зміну величини варіації при збільшенні параметра n .

Таблиця 4.

Варіації арифметизації шкали $S=(X;R_{>})$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\operatorname{var}\xi(i,7,8)$	1,286	0,842	0,627	0,486	0,376	0,281	0,184
$\operatorname{var}\xi(i,7,50)$	1	0,654	0,488	0,378	0,293	0,218	0,143
$\operatorname{var}\xi(i,7,99)$	0,968	0,634	0,473	0,366	0,284	0,211	0,138
$\operatorname{var}\xi(i,7,199)$	0,952	0,623	0,465	0,36	0,279	0,208	0,136
$\operatorname{var}\xi(i,7,299)$	0,946	0,62	0,462	0,358	0,277	0,207	0,135

З наведених прикладів видно, що починаючи з $n=199$, варіація майже не змінюється.

Рекомендації щодо вибору арифметизації шкали якості.

Існує декілька варіантів арифметизації. Наведемо деякі з них:

1. Арифметизація за апріорною інформацією

Апріорна інформація отримана за експертними оцінками. Маємо 10 експертів, які оцінювали якість ПЗ. 1 експерт визнав якість ПЗ як «задовільну», і оцінив її, обравши градацію x_4 шкали строгого лінійного порядку $S=(X;R_{>})$, $X=\{x_0,...,x_8\}$, $(x_i,x_{i-1})\in R$), 6 експертів оцінили її як градацію x_5, і 3 експерти визнали її «доброю» (градація x_6). Далі експертам запропонували оцінити якість ПЗ за десятибальною шкалою, отримали: 1 експерт – 5 балів, 6 експертів по 6,балів та 3 експерти оцінили як 7 балів.

В результаті маємо шкалу, де 5 балів відповідає градація x_4, 6 балів - x_5, та 7 балів – x_6, але така арифметизація є досить неточною, хоча дуже простою.

2. Арифметизація за площиною одномірного розподілу, що знаходиться нижче обраної градації шкали

Це задача локалізації області числових значень, що приписуються пунктам $X=\{x_1,...,x_7\}$ шкали $S=(X;R_>)$ при заданій ймовірності, а саме локалізації значень випадкових величин $p(j;1,7,8),...,p(j;7,7,8)$, відповідно.

При ймовірності 0,6 визначимо арифметизацію шкали $S=(X;R_>)$, результат знаходиться в таблиці 5.

3. Арифметизація за медіаною розподілу

Даний метод використовується в випадку, коли апріорна інформація відсутня.

Визначаємо медіани для всіх одномірних розподілів $p(j;1,7,8),...,p(j;7,7,8)$. Далі для градації шкали 0,5 визначаємо значення шкали арифметизації за допомогою графіків. Для прикладу, побудуємо графік для одномірного розподілу $p(j;5,7,8)$ (рис. 3).

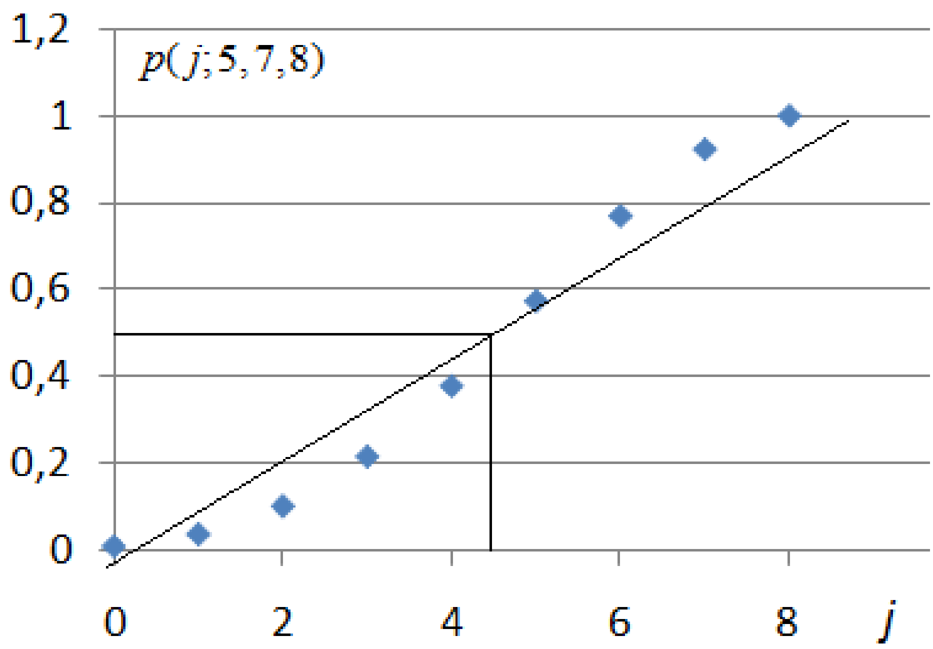

Рис. 3. Графік для одномірного розподілу $p(j;5,7,8)$ з медіаною

З рис. 3 видно, що значення шкали арифметизації приблизно дорівнює 4,5. Занесемо до таблиці 5 значення для всіх $p(j;1,7,8),...,p(j;7,7,8)$.

Таблиця 5.

Значення градацій шкали арифметизування при використанні методу медіани

Градації ординальної шкали	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

Градації шкали арифметизації за площиною одномірного розподілу	0	1,25	2,4	3,5	4,6	5,75	7
Градації шкали арифметизації за медіаною розподілу	0	1,4	2,5	3.4	4,5	5.5	7

Результати арифметизацій за медіаною та площиною одномірного розподілу, що знаходиться нижче обраної градації шкали, що наведені в табл. 5 схожі, але останній метод має дещо простіші розрахунки.

4. Арифметизація за жорсткістю випробовувань

Арифметизацію при збільшенні жорсткості випробовувань покажемо на прикладі методу комплексування показників якості.

При збільшенні жорсткості межі $Q_{нс}$ та $Q_{св}$ змістяться вправо. Для випадку, в якому 40% показників Н та 60% В маємо:

$$Q_{нс} = 1 - 0,4 - 0,5 \cdot 0,6 = 0,3 .$$

Для 70% – С, та 30% – В, маємо:

$$Q_{св} = 1 - 0,5 \cdot 0,3 = 0,85 .$$

Отримуємо шкалу для більш жорсткого оцінювання, та накладемо нові межі на рис. 1, отримаємо рис. 4.

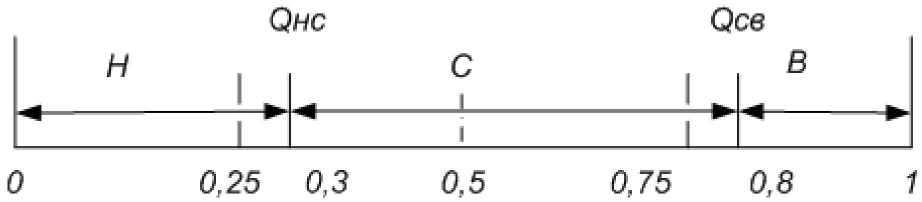

Рис. 4. Приклад зміщення меж при збільшенні жорсткості випробувань

Висновки

В статті наведено аналіз і порівняння різних способів арифметизації ординальних вербальних шкал якості ПЗ. Розроблено алгоритм арифметизації. Показано, що при $n \square m$ розсіювання при арифметизації значне. Тому для зменшення розсіювання ймовірності потрібно збільшувати кількість градацій n по відношенню до m, $n >> m$. При цьому потрібно враховувати, що при занадто великому n (при $n > 100$) відносна дисперсія $\operatorname{var} \xi(i, m, n)$ майже не змінюється. Отже розсіювання велике і потрібні критерії для вибору конкретної арифметизації.

Розроблено підходи до вибору арифметизування вербальної шкали за допомогою апріорної інформації, площини одномірного розподілу, що знаходиться нижче обраної градації шкали, медіани розподілу, жорсткості випробовувань. В статті наведено приклади застосування наведених вище підходів.

Список використаної літератури

1. International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM) // International Organization for standardization. – 2008.
2. *Хамханова Д. Н.* Теоретические основы обеспечения единства экспертных измерений. / Д. Н. Хамханова – Улан–Удэ. – изд. ВСГГУ. – 2006.– 170с.
3. *Хованов Н.В.* / Математические основы теории шкал измерения качества . – Ленинград. – 1982. – 169с.
4. *Хованов Н.В.* / Стохастические модели теории квалиметрических шкал – Ленинград. – 1986. – 76с.